Dalla successione di Collatz Personalizzata si deduce la veridicità della stessa

ARDITO Prof. Nicola

n.ardito52@gmail.com oppure n_ardito@alice.it

BARI – ITALIA

9 Agosto 2025

Sommario

Uno tra i problemi di matematica elementare, a tutt'oggi irrisolto, `e la congettura di Collatz (dal matematico Lothar Collatz). Essa riguarda la seguente funzione tra numeri naturali: f: N→ N con f(N)= N/2 se N è pari oppure f(N)=(3*N+1) se N è dispari.
Iterando la funzione più volte, dopo un certo numero di iterazioni si ottiene il numero 1 e continuando le iterazioni si ha il ciclo $1 \to 4 \to 2 \to 1$. Quindi il numero iniziale N, nelle iterazioni successive, viene moltiplicato per 3 (sommando 1) e diviso per 2, per cui si ha una successione di passaggi dispari (quando si moltiplica per 3 e si aggiunge 1) e di passaggi pari (quando si divide per 2) che, dopo un certo numero totale di passaggi pari b_i e un certo numero totale di passaggi dispari a_i, converge ad 1.
Nei miei 2 lavori precedenti è stata definita una successione personalizzata della funzione di Collatz, formulata su base modulare e orientata alla riduzione del numero di iterazioni necessarie per la convergenza. Grazie a una codifica algoritmica e a una struttura diagrammatica, il metodo consente un tracciamento semplificato dei passaggi pari e dispari, con evidenti vantaggi computazionali.
In questo lavoro verifico anche il **Teorema n.6.2 del riferimento [1]** e dimostro lo stesso usando il **Teorema dell'intersezione tra due spezzate** al paragrafo 5.

1 Introduzione

Nella mia successione di Collatz, personalizzata e più veloce, si usano (dopo un eventuale numero iniziale che può` essere anche pari modulo 4) solo numeri dispari congrui a 1 mod 4 e congrui 3 mod 4. Questi ultimi rappresentano il 50% di un gruppo di numeri interi consecutivi e di questi la metà (il 25%) sono congrui 1 mod 4, che hanno sempre nella successione un numero successivo minore del precedente, e l'altra metà (il 25%) sono congrui 3 mod 4, che in base alla **Considerazione importante 5.1** e **Nota 6.2 del riferimento [1]** hanno una probabilità del 10,9375% (sul 25%) di avere nella successione un numero successivo minore del precedente.

Quindi, in conclusione, la successione da me personalizzata, che usa solo numeri dispari, in ogni iterazione ha la probabilità del 35,9375% (cioè, quasi 36 numeri su 50) di avere nella successione un numero successivo minore del precedente e una probabilità del 14,0625% (cioè, quasi 14 numeri su 50) di avere nella successione un numero successivo maggiore del precedente.

In questo mio nuovo lavoro si studierà in modo approfondito il comportamento dei valori in ogni iterazione i delle variabili $T1_i$ e $T2_i$, e del valore corrispondente $b_i - a_i = T1_i + 2 \cdot T2_i$. Ricordiamo che $T1_i$ è la somma di tutte le iterazioni precedenti, compresa l'iterazione considerata, in cui c'è stato l'aumento di 1 unità nella differenza tra $b - a$ (punto 4 e punto 6 della successione personalizzata), e dove $T2_i$ è la somma di tutte le iterazioni precedenti,

compresa l'iterazione considerata, in cui c'è stato l'aumento di 2 unità nella differenza tra $b - a$ (punto 3 e punto 5 della successione personalizzata).

Inoltre, si studierà in modo approfondito nel piano cartesiano, in ogni iterazione i, il passaggio tra il punto precedente $P_{i-1}(a_{i-1};b_{i-1} - a_{i-1})$ e quello successivo $P_i(a_i;b_i - a_i)$, quindi tra i punti $P_{i-1}(a_{i-1};T1_{i-1} +2\cdot T2_{i-1})$ e $P_i(a_i;T1_i +2\cdot T2_i)$, che sono, nel piano cartesiano stesso, gli estremi di segmenti consecutivi che formano una spezzata aperta e semplice in cui ogni segmento è inclinato di un valore m_i positivo, il quale dipende dai 6 punti della successione personalizzata. Ricordiamo inoltre che in ogni iterazione il totale dei passaggi pari (che indico con b_i) è sempre maggiore del totale dei passaggi dispari (che indico con a_i), cioè si ha $b_i > a_i$, e nelle iterazioni successive si ha che b_i aumenta più di a_i, poiché la differenza tra il totale dei passaggi pari ed il totale dei passaggi dispari aumenta sempre di 1 oppure di 2 unità in ogni iterazione. Questo produce, nelle iterazioni successive, una differenza tra b_i e a_i che aumenta sempre.

2 Successione di Collatz personalizzata

Dalla rappresentazione testuale della Successione di Collatz personalizzata (vedere paragrafo 2 del riferimento [2]), in base ai 6 punti della stessa, stabiliamo come avviene nel piano cartesiano, per ogni iterazione i, il passaggio tra i punti $P_{i-1}(a_{i-1}; b_{i-1} - a_{i-1})$ e $P_i(a_i; b_i - a_i)$, ovvero tra $P_{i-1}(a_{i-1}; T1_{i-1} + 2 \cdot T2_{i-1})$ e $P_i(a_i; T1_i + 2 \cdot T2_i)$, e calcoliamo l'inclinazione del segmento $P_{i-1}P_i$.

Nota importante: La seguente successione da me personalizzata si applica a tutti i numeri interi **N diversi da (2^p-1)/3 con p>=2 e con p numero intero pari cioè l'insieme {1 – 5 – 21 – 85 – 341 – 1365 - ….}. In effetti questi (2^p-1)/3 numeri interi e dispari soddisfano la congettura di Collatz e convergono subito ad 1 dopo un solo passaggio dispari e p passaggi pari** (inserire nel programma python questa condizione perché potrebbe presentarsi durante le iterazioni successive**).** In effetti applicando ad essi il passaggio dispari 3*N+1 si ottiene il numero **2^p** che dopo p passaggi pari converge ad 1. In questo caso aumento dispari uguale ad **1** ed aumento pari uguale a **p** quindi la differenza tra passaggi pari e passaggi dispari è uguale a **p-1** per cui P_{i-1} = (x, y) punto iniziale, P_i = (x+1, y+p-1) punto successivo, segmento obliquo crescente con m_i = p e lunghezza uguale alla radice quadrata di p^2-2*p+2.

- Punto 1: $N \equiv 0 \bmod 4$**, cioè** $N = 2^{p}(1+2k)$ **con N numero iniziale**

- Dopo p passaggi pari, il successivo è $1 + 2k$
- Se k è pari, allora $1 + 2k \equiv 1 \bmod 4$; se k è dispari $1 + 2k \equiv 3 \bmod 4$
- Aumento: $a_1 = 0$, $b_1 = p$, quindi $b_1 - a_1 = p$
- P_0 = (0,0) punto iniziale, P_1 = (0, p) punto successivo, segmento verticale, $m_i = +\infty$, lunghezza = p

- Punto 2: $N \equiv 2 \bmod 4$**, cioè** $N = 4k + 2$ **con N numero iniziale**

- Dopo 1 passaggio pari, il successivo è $2k + 1$
- Se k è pari, allora $2k + 1 \equiv 1 \bmod 4$; se è k dispari $2k + 1 \equiv 3 \bmod 4$
- Aumento: $a_1 = 0$, $b_1 = 1$, quindi $b_1 - a_1 = 1$
- P_0 = (0,0) punto iniziale, P_1 = (0,1) punto successivo, segmento verticale, $m_i = +\infty$, lunghezza = 1

- Punto 3: $N \equiv 1 \bmod 4$**, con** $N = 4(1 + 2k) + 1$

- Dopo 0 passaggi dispari e 2 pari, il successivo è $1 + 2k$
- Se k è pari, allora $1 + 2k \equiv 1 \bmod 4$; se k è dispari $1 + 2k \equiv 3 \bmod 4$

- Aumento: $a_i = 0$, $b_i = 2$, quindi $b_i - a_i = 2$
- $P_{i-1} = (x, y)$ punto iniziale, $P_i = (x, y + 2)$ punto successivo, segmento verticale, $m_i = +\infty$, lunghezza = 2

- Punto 4: $N \equiv 1 \bmod 4$**, con** $N = 4(2k) + 1$

- Dopo 1 passaggio dispari e 2 pari, il successivo è $6k + 1$
- Se k è pari, allora $6k + 1 \equiv 1 \bmod 4$; se k è dispari, $6k + 1 \equiv 3 \bmod 4$
- Aumento: $a_i = 1$, $b_i = 2$, quindi $b_i - a_i = 1$
- $P_{i-1} = (x, y)$ punto iniziale, $P_i = (x+1, y+1)$ punto successivo, segmento obliquo crescente con $m_i = 1$ e lunghezza uguale alla radice quadrata di 2;

- Punto 5: $N \equiv 3 \bmod 4$**, con** $N = 2^p(1+2k) - 1$ **con k e p entrambi pari oppure entrambi dispari e con k** ≥ 0 **e** $p \geq 2$

- Dopo $p - 1$ passaggi dispari e $p + 1$ pari, il successivo è [3^(p-1)*(1+2*k)-1]/2
- Aumento: $a_i = p - 1$, $b_i = p + 1$, quindi $b_i - a_i = 2$
- $P_{i-1} = (x, y)$ punto iniziale, $P_i = (x+p-1, y+2)$ punto successivo, segmento obliquo crescente con, m=2/(p-1), dipendente da p (vedi TABELLA 1) e con lunghezza uguale alla radice quadrata di $[4 + (p - 1)^2]$

- Punto 6: $N \equiv 3 \bmod 4$**, con** $N = 2^p(1 + 2k) - 1$ **con k pari e p dispari oppure con k dispari e p pari e con k** ≥ 0 **e** $p \geq 2$

- Dopo p passaggi dispari e $p + 1$ pari, il successivo è [3^(p)*(1+2*k)-1]/2
- Aumento: $a_i = p$, $b_i = p + 1$, quindi $b_i - a_i = 1$
- $P_{i-1} = (x, y)$ punto iniziale, $P_i = (x+p, y+1)$ punto successivo, segmento obliquo crescente con, m=1/p, dipendente da p (vedi TABELLA 2) e con lunghezza uguale alla radice quadrata di $[1 + (p)^2]$

TABELLA 1 e 2 di inclinazione

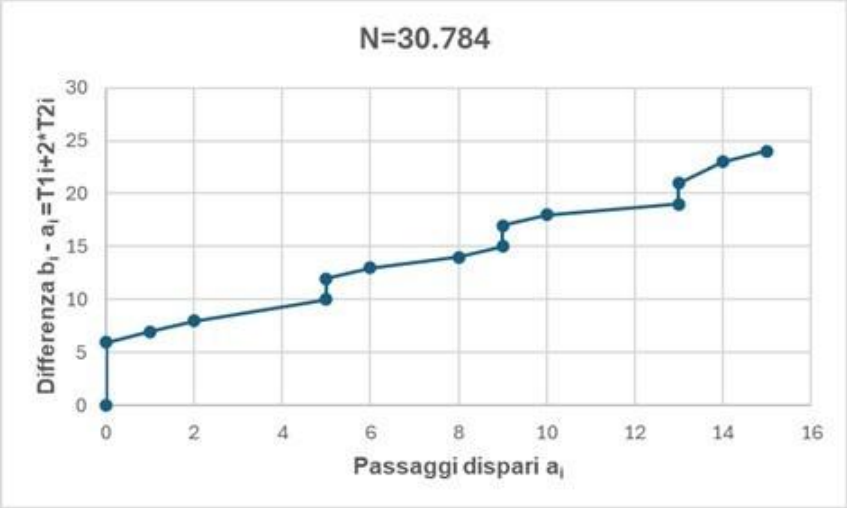
Punto 5	m=2/(p-1)	**Punto 6**	m=1/p
2	2,0000	2	0,5000
3	1,0000	3	0,3333
4	0,6667	4	0,2500
5	0,5000	5	0,2000
6	0,4000	6	0,1667
7	0,3333	7	0,1429
8	0,2857	8	0,1250
9	0,2500	9	0,1111
10	0,2222	10	0,1000
11	0,2000	11	0,0909
12	0,1818	12	0,0833
13	0,1667	13	0,0769
14	0,1538	14	0,0714
15	0,1429	15	0,0667
16	0,1333	16	0,0625
17	0,1250	17	0,0588
18	0,1176	18	0,0556
19	0,1111	19	0,0526
20	0,1053	20	0,0500

Figura 1: Successione di Collatz personalizzata sul numero iniziale N=30784

Iterazioni	step	N	Punto della successione	Dispari	Pari	b-a=T_{1i}+2*T_{2i}
0		30784		0	0	0
1	6	481	Punto 1 con p=6 ed m=+∞	0	6	6
2	9	361	Punto 4 con m=1	1	8	7
3	12	271	Punto 4 con m=1	2	10	8
4	20	229	Punto 5 con p=4 ed m=0,6667	5	15	10
5	22	57	Punto 3 con m=+∞	5	17	12
6	25	43	Punto 4 con m=1	6	19	13
7	30	49	Punto 6 con p=2 ed m=0,5	8	22	14
8	33	37	Punto 4 con m=1	9	24	15
9	35	9	Punto 3 con m=+∞	9	26	17
10	38	7	Punto 4 con m=1	10	28	18
11	45	13	Punto 6 conp=3 ed m=0,3333	13	32	19
12	47	3	Punto 3 con m=+∞	13	34	21
13	51	1	Punto 5 con p=2 ed m=2	14	37	23
14	54		Punto 4 con m=1	15	39	24

Verifichiamo la successione di Collatz personalizzata sul numero iniziale N = 30784 osservando la spezzata aperta e semplice formata dai punti iniziali $P_{i-1}(a_{i-1}; T1_{i-1} + 2 \cdot T2_{i-1})$ e finali P_i $(a_i; T1_i + 2 \cdot T2_i)$ di ogni iterazione i nel piano cartesiano. La spezzata formata da 14 segmenti consecutivi (pari al numero di iterazioni) ha come punto iniziale $P_0(0;0)$ e punto finale $P_{14}(15;24)$. La retta che unisce questi due punti ha inclinazione: m = 24/15= 1,6 > 0,5849625 e ha come punto iniziale $P_0(0;0)$:

Figura 2: Successione di Collatz personalizzata sul numero iniziale N=30784



3 Quando *N* converge ad 1

Il susseguirsi dei numeri dispari della successione personalizzata al numero iniziale *N* dipende, in ogni iterazione, dai valori di a_i e b_i, con b_i che aumenta sempre rispetto ad a_i. Quindi, il numero iniziale *N* converge ad 1 quando, in una determinata iterazione *s*, si ottiene un valore di b_s e a_s tale che $b_s > a_s$ e si verifica la disuguaglianza: [3^(a_s)*N] / [2^(b_s)] < 1

Passando al logaritmo: a_s* log(3) − b_s * log(2) + log(*N*) < 0 da cui derivano le seguenti disuguaglianze:**$b_s > a_s$*log(3)/log(2)+ $\log_2$(N)** e **b_s-a_s> a_s*log(3/2)/log(2) + $\log_2$(N)**

cioè **$b_s > a_s$*1,5849625+ $\log_2$(N)** e **b_s-a_s> a_s*0,5849625 + $\log_2$(N).**

Essendo $b_s - a_s$ e b_s numeri interi, si arrotonda al successivo intero:

***b_s*= ARR.ECC [a_s *1,5849625+ $\log_2$(N)]** e ***$b_s - a_s$* = ARR.ECC [a_s *0,5849625+$\log_2$(N)]**

Queste due uguaglianze, quando verificate per valori unici di a_s e b_s, fanno convergere il numero iniziale *N* ad 1, dimostrando che la congettura è vera per ogni N intero positivo. La iterazione *s* in cui sono verificate le due uguaglianze è unica, poiché in ogni **iterazione *i* precedente a *s*** (***i* < *s***) si hanno le seguenti disuguaglianze:

***b_i* < ARR.ECC [a_i *1,5849625+ $\log_2$(N)] e *$b_i - a_i$* < ARR.ECC [a_i *0,5849625+$\log_2$(N)].**

Funzione discreta associata

Consideriamo la retta crescente associata al numero iniziale *N*: *y*= [a_i *0,5849625+$\log_2$(N)] in un piano cartesiano, dove i valori dell'asse *x* sono quelli di a_i. Per ogni iterazione *i*, definiamo la funzione discreta (con il suo valore arrotondato al numero intero successivo):

f(a_i)= ARR.ECC [a_i *0,5849625+$\log_2$(N)]

Questa funzione ha andamento simile alla retta crescente di coefficiente angolare *m* = 0.5849625 e punto iniziale: Q= (0; $\log_2$(N)).

Il grafico della funzione *f* è una spezzata aperta e semplice formata da segmenti crescenti con inclinazione costante, che uniscono in ogni iterazione il punto precedente $Q_{i-1}(a_{i-1}; f(a_{i-1}))$ con il punto successivo Q_i (a_i; $f(a_i)$). Risulta chiaro che, se il numero iniziale *N* converge ad 1 in una iterazione *s* della successione personalizzata, si avrà l'uguaglianza tra la differenza $b_s - a_s = T1_s + 2 \cdot T2_s$ e la funzione *f* calcolata in a_s, e cioè: $f(a_s) = b_s - a_s = T1_s + 2 \cdot T2_s$

cioè, le due spezzate si incontrano nel punto: (a_s; $f(a_s)$) = (a_s; $b_s - a_s$).

Verifichiamo l'uguaglianza $f(a_s) = b_s - a_s = T1_s + 2 \cdot T2_s$ considerando il numero iniziale *N* = 30784, e calcoliamo i valori di a_i e $f(a_i)$ nella TABELLA 3 seguente e nel grafico corrispondente della retta in un sistema di assi cartesiani. In questo caso: $\log_2$(N)= $\log_2$(30784)=14,909

la retta è : $y = a_i \cdot 0{,}5849625 + 14{,}909$ e $f(a_i) = [a_i \cdot 0{,}5849625 + 14{,}909]$

in cui il valore della funzione f viene arrotondato al numero intero successivo.

Figura 3: Tabella 3

Iterazioni	step	N	Punto della successione	Dispari	Pari	b-a=T_{1i}+2*T_{2i}	y=a_i*0,5849625 +14,909	f(ai)=ai*0,5849625+ 14,909
0		30784		0	0	0	14,909	15
1	6	481	Punto 1 con p=6 ed m=+∞	0	6	6	14,909	15
2	9	361	Punto 4 con m=1	1	8	7	15,4939625	16
3	12	271	Punto 4 con m=1	2	10	8	16,078925	17
4	20	229	Punto 5 con p=4 ed m=0,6667	5	15	10	17,8338125	18
5	22	57	Punto 3 con m=+∞	5	17	12	17,8338125	18
6	25	43	Punto 4 con m=1	6	19	13	18,418775	19
7	30	49	Punto 6 con p=2 ed m=0,5	8	22	14	19,5887	20
8	33	37	Punto 4 con m=1	9	24	15	20,1736625	21
9	35	9	Punto 3 con m=+∞	9	26	17	20,1736625	21
10	38	7	Punto 4 con m=1	10	28	18	20,758625	21
11	45	13	Punto 6 conp=3 ed m=0,3333	13	32	19	22,5135125	23
12	47	3	Punto 3 con m=+∞	13	34	21	22,5135125	23
13	51	1	Punto 5 con p=2 ed m=2	14	37	23	23,098475	24
14	54		Punto 4 con m=1	15	39	24	23,6834375	24

Figura 4:

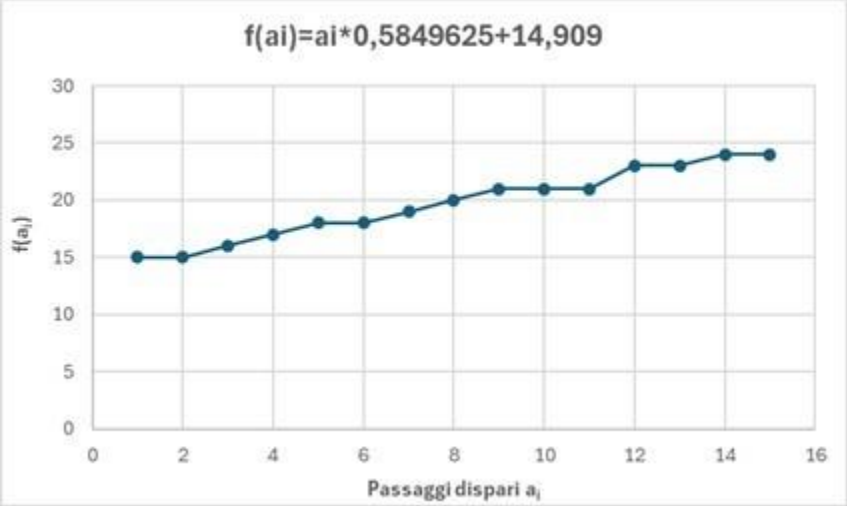
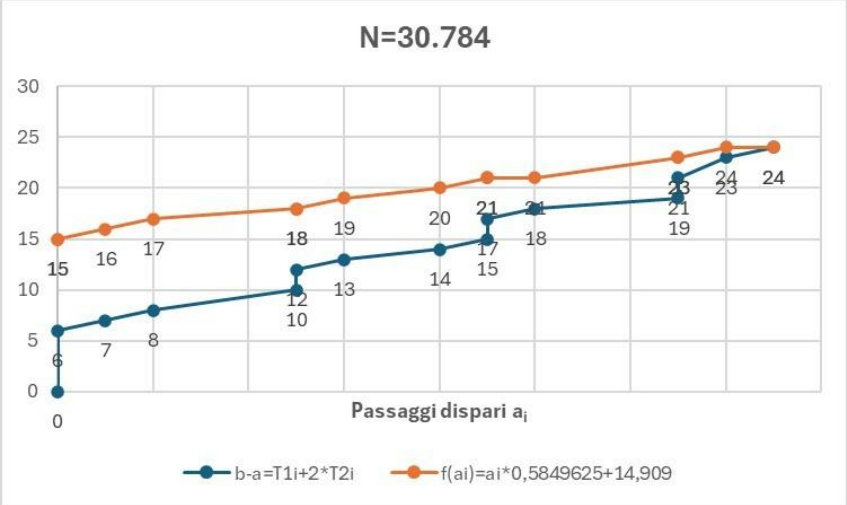


Figura 5:



Nel grafico della figura 5 precedente confrontiamo ora, nello stesso diagramma cartesiano, la spezzata crescente, aperta e semplice formata dai punti iniziali $P_{i-1}(a_{i-1}; T1_{i-1} + 2 \cdot T2_{i-1})$ e finali $P_i\,(a_i; T1_i + 2 \cdot T2_i)$ di ogni iterazione i dello stesso numero iniziale $N = 30{,}748$, con la spezzata crescente, aperta e semplice della funzione $f(a_i)$. Dalla TABELLA 3 e dalla figura 5 si verifica che effettivamente esiste un'iterazione $s = 14$ in cui sono verificate le due uguaglianze con i rispettivi valori arrotondati al numero intero successivo:

b_s = ARR.ECC [a_s *1,5849625+ $\log_2(N)$] e $b_s - a_s$ = ARR.ECC [a_s *0,5849625+$\log_2(N)$]

Nel caso specifico:

$$b_{14} = 39, \qquad a_{14} = 15, \qquad b_{14} - a_{14} = 24$$

per cui: $f(15) = b_{14} - a_{14}$ = ARR.ECC [23,68] = 24

e: b_{14} = ARR.ECC [a_{14} *1,5849625+ $\log_2(N)$] = ARR.ECC [38,68] =39

Quindi, la spezzata aperta e semplice ha punto iniziale $P_0(0;0)$ nell'origine degli assi e, considerando il punto finale $P_{14}(15;24)$, essa ha inclinazione finale m=24/15 = 1,60

La funzione $f(a_i)$ ha un andamento simile alla retta crescente:

$$y = [a_i * 0{,}5849625 + \log_2(N)]$$

di coefficiente angolare m = 0.5849625, in cui il valore di y si arrotonda al numero intero successivo. Il punto iniziale della retta è: Q=(0; $\log_2$(N)) con $\log_2$(N)>0, per cui Q si trova sull'asse positivo delle y.

Quindi, il verificarsi delle due uguaglianze correlate dipende dall'intersezione delle due spezzate aperte e semplici. Questa intersezione esiste perché l'inclinazione finale m = 1,6 della spezzata personalizzata è maggiore dell'inclinazione m = 0,5849625 della spezzata della funzione $f(a_i)$, la quale ha il punto iniziale Q sull'asse positivo delle y.

4 La spezzata aperta e semplice nella successione personalizzata

Dal paragrafo 2 sappiamo che la spezzata aperta e semplice `e formata da segmenti crescenti, ciascuno con inclinazione m dipendente da uno dei sei punti della successione personalizzata, come segue:

- **Punto 1** → Segmento verticale e crescente con m = +∞, quindi m > 0,5849625, e incremento sull'ordinata pari a p.
- **Punto 2** → Segmento verticale e crescente con m = +∞, quindi m > 0,5849625, e incremento sull'ordinata pari a 1.
- **Punto 3** → Segmento verticale e crescente con m = +∞, quindi m > 0,5849625, e incremento sull'ordinata pari a 2.
- **Punto 4** → Segmento obliquo e crescente con m = 1, quindi m > 0,5849625, e incremento sull'ordinata pari a 1.
- **Punto 5** → Segmento obliquo e crescente con m=2/(p-1), dipendente da p. Si ha m > 0,5849625 solo se 2 ≤ p ≤ 4, e incremento sull'ordinata pari a 2 (vedi TABELLA 1). In questo caso, la probabilità di avere m > 0,5849625 è del 10,9375% sui 25% dei numeri dispari congrui a 3 mod 4 (vedi **Considerazione importante 5.1 e Nota 6.2 del riferimento [1]**).
- **Punto 6** → Segmento obliquo e crescente con m=1/p, dipendente da p. Si ha sempre m < 0,5849625 per ogni p ≥ 2, e incremento sull'ordinata pari a 1 (vedi TABELLA 2). In questo caso, la probabilità di avere m > 0,5849625 è 0%, mentre la probabilità di avere sempre m < 0,5849625 `e del 14,0625% sui 25% dei numeri dispari congrui a 3 mod 4 (**vedi Considerazione importante 5.1 e Nota 6.2 del riferimento [1]**).

Analisi delle inclinazioni dei segmenti nella spezzata aperta e semplice

Quindi, dopo un eventuale numero iniziale N pari su cui si applica il punto 1 oppure il punto 2 della successione, nella successione personalizzata si continua con:

- numeri dispari ≡ 1 (mod 4), dove si applicano i punti 3 oppure 4 della successione personalizzata;
- numeri dispari ≡ 3 (mod 4), dove si applicano i punti 5 oppure 6 della successione personalizzata.

Nel caso dei numeri dispari ≡ 1 (mod 4) (che rappresentano il 25% di un insieme di numeri compresi, ad esempio, tra 1 e 2^n), il segmento corrispondente nella spezzata aperta e semplice ha sempre un'inclinazione:

$$m > 0{,}5849625$$

Nel caso dei numeri dispari ≡ 3 (mod 4), il comportamento è più articolato:

- Il segmento ha inclinazione $m > 0{,}5849625$ solo per il punto 5, quando k e p sono entrambi pari oppure entrambi dispari e con $2 \le p \le 4$. Questi numeri rappresentano il 10,93750% del 25%.
- Per i restanti numeri dispari ≡ 3 (mod 4), ovvero:
  - punto 5 con $p \ge 5$ quando k e p sono entrambi pari oppure entrambi dispari,
  - punto 6 con $p \ge 2$ quando k è pari e p è dispari o viceversa,

  il segmento corrispondente ha inclinazione:

$$m < 0{,}5849625$$

  e rappresenta il 14,06250% del 25%.

Pertanto, in ogni iterazione si ha:

- una probabilità del 35,9375% di ottenere nella spezzata aperta e semplice un segmento con inclinazione $m > 0{,}5849625$, cioè quasi 36 segmenti su 50. In questo caso, la spezzata tende ad intersecarsi con la spezzata della funzione $f(a_i)$.

- una probabilità del 14,06250% di ottenere un segmento con inclinazione $m < 0{,}5849625$, cioè quasi 14 segmenti su 50. In questo caso, la spezzata è sempre crescente ma in maniera minore rispetto alla funzione $f(a_i)$, e quindi l'intersezione con $f(a_i)$ viene rimandata alle iterazioni successive.

5 Dimostrazione formale dell'intersezione tra due spezzate

Definizioni preliminari

Sia N un intero positivo. Consideriamo una successione (a_i, b_i) generata da un processo iterativo (successione di Collatz personalizzata), equivalente alla successione di Collatz, dove:

- a_i è il numero totale di passi dispari effettuati fino all'iterazione i compresa;
- b_i è il numero totale di passi pari effettuati fino all'iterazione i compresa;
- La differenza $b_i - a_i$ cresce sempre ad ogni iterazione di 1 oppure 2 unità.

Definiamo due spezzate nel piano cartesiano:

- **Spezzata 1**: $(a_i, b_i - a_i)$ con punto iniziale $(0, 0)$
- **Spezzata 2**: $(a_i, f(a_i))$ con punto iniziale $(0, \log_2(N))$, definita da:

$$f(a_i) = \lceil a_i \cdot \lambda + \log_2(N) \rceil$$

  dove $\lambda = \log_2(3) \approx 0{,}5849625$ e $f(a_i)$ viene arrotondato al numero intero positivo successivo.

Teorema dell'intersezione tra due spezzate

Per ogni intero positivo N, esiste almeno una iterazione s tale che:

$$b_s - a_s = f(a_s)$$

cioè, le due spezzate si intersecano nel punto:

$$(a_s, f(a_s)) = (a_s, b_s - a_s)$$

Dimostrazione

1. **Crescita delle funzioni**
   - I valori di a_i non decrescono nelle iterazioni successive.

- La funzione $f(a_i)$ è strettamente crescente rispetto ad a_i, essendo somma di una funzione lineare strettamente crescente con inclinazione $\lambda = \log_2(3) \approx 0{,}5849625$ e una costante $\log_2(N)$.
- La differenza $b_i - a_i$ cresce sempre ad ogni iterazione di 1 oppure 2 unità.

2. **Comportamento discreto**
   - Entrambe le spezzate sono definite su insiemi discreti.
   - Poiché $f(a_i)$ cresce linearmente e $b_i - a_i$ cresce più rapidamente (**in media**), esiste almeno un punto in cui le due funzioni coincidono.
3. **Principio del confronto discreto**
   - Inizialmente: $a_0 = 0$, $b_0 = 0$, quindi $b_0 - a_0 = 0$
   - Ma $f(a_0) = \lceil \log_2(N) \rceil > 0$, quindi $b_0 - a_0 < f(a_0)$
   - Allora, per la monotonicità delle due funzioni, esiste un primo indice s tale che:

$$b_s - a_s = f(a_s) \qquad \textbf{c.v.d.}$$

Esempio concreto: $N = 30784$

Dal prospetto iterativo (Tabella 3), si osserva che:

- In ogni iterazione i precedente a s ($i < s$), si ha la seguente disuguaglianza:

$$b_i - a_i < f(a_i)$$

- Alla iterazione $s = 14$:

  si ha $a_s = 15 \quad b_s = 39 \quad b_s - a_s = 24$

$$f(a_s) = \lceil 15 \cdot 0{,}5849625 + \log_2(30784) \rceil = \lceil 8{,}7744375 + 14{,}909 \rceil = \lceil 23{,}683... \rceil = 24$$

$$\Rightarrow \quad b_s - a_s = f(a_s) \quad \Rightarrow \quad \text{intersezione nel punto } (15;24)$$

Il punto di intersezione tra le due spezzate rappresenta un equilibrio tra la crescita empirica della successione e la stima teorica fornita dalla funzione $f(a)$. Questo punto può essere interpretato come una soglia in cui la complessità iterativa coincide con la previsione logaritmica.

6 Interpretazione dei risultati

Dall'applicazione della successione di Collatz personalizzata rispetto a quella canonica emerge una differenza significativa nel numero di iterazioni. Questa riduzione è frutto di una gestione ottimizzata delle traiettorie, basata su:

- **Classificazione modulo 4**, che permette di individuare subito il tipo di orbita da applicare;
- **Eliminazione dei passaggi pari intermedi**, che nella successione canonica rallentano il percorso verso l'unita`;
- **Utilizzo del concetto di isopath**, che consente di sostituire gruppi di numeri con equivalenti più semplici senza perdere informazioni strutturali.

Inoltre, la differenza crescente tra il numero totale di passaggi pari e dispari dimostra una tendenza strutturale che favorisce la convergenza: l'incremento costante di 1 oppure 2 unità di $b_i - a_i$ per ogni iterazione i non solo velocizza il processo, ma suggerisce che l'accelerazione è sistemica e non casuale. Questo porta sicuramente ai valori a_s e $b_s - a_s$ per cui le due spezzate si incontrano, e quindi il numero iniziale N converge a 1 nell'iterazione s.

7 Conclusioni

Se la successione personalizzata mantiene questa efficienza per valori arbitrari di *N*, si aprono nuovi scenari per una dimostrazione costruttiva della congettura di Collatz, fondata su criteri combinatori e modulari. In particolare, l'approccio evidenzia come l'informazione racchiusa nei numeri congrui a 1 e 3 (mod 4) sia sufficiente per descrivere l'intera dinamica della congettura.

La successione di Collatz personalizzata non è solo una semplificazione operativa, ma una potenziale chiave teorica per affrontare uno dei problemi aperti più famosi della matematica elementare.

Questo modo di procedere nella successione personalizzata porta agli stessi risultati della successione di Collatz canonica e non dipende dal numero iniziale, in quanto essa si applica allo stesso modo e porta agli stessi risultati sia su numeri interi con poche cifre che su numeri interi con un numero illimitato di cifre.

Sono state svolte molte prove su numeri diversi, contenenti anche un numero di cifre numerose, usando un programma in Python di mia creazione che segue fedelmente la mia successione personalizzata. I test effettuati su numeri con moltissime cifre hanno confermato la veridicità della congettura.

Riferimenti

[1] Ardito, Prof. Nicola — *La congettura di Collatz da un punto di vista elementare*. Disponibile su: https://independent.academia.edu/NICOLAARDITO1

[2] Ardito, Prof. Nicola — *Successione di Collatz Personalizzata, Riduzione Modulare, Orbite Isopath e Analisi dei Passaggi Pari e Dispari*. Disponibile su: https://independent.academia.edu/NICOLAARDITO1

Contatti

- Blog personale: https://collatzardito.wordpress.com/
- Archivio documenti: https://archive.org/search?query=collatz+ardito+nicola